A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

PPI 2r., sem. letni
LISTA 11

Wrocław, 30 maja 2006

ZADANIE 1. Sprawdź, że norma operatorowa w $L(X,Y)$

$$||P|| = \sup\{||P(x)|| : ||x|| = 1\}$$

jest normą, i że jeśli Y jest zupełna to $L(X,Y)$ jest zupełna.

ZADANIE 2. Udowodnij, że przestrzeń sprzężona do l^1 jest izometrycznie izomorficzna z l^∞ (z normą supremum).

ZADANIE 3. Udowodnij, że przestrzeń sprzężona do l^2 jest izometrycznie izomorficzna z l^2.

ZADANIE 3a. Udowodnij, że przestrzeń sprzężona do $L^2([0,1])$ jest izometrycznie izomorficzna z $L^2([0,1])$.

ZADANIE 4. W przestrzeni $C^1([0,1])$ (funkcje mające ciągłą pochodną) rozważmy dwie normy: zwykłą normę supremum i normę $||f|| = |f(0)| + \sup_x\{f'(x)\}$. Czy w którejś z nich operator różniczkowania określony na $C^1([0,1])$ (o wartościach oczywiście w $C([0,1])$ z normą supremum) jest ciągły?

ZADANIE 5. Rozważamy operator całkowy $f \to P(f)$ z przestrzeni $C([a,b])$ w tą samą przestrzeń zadany wzorem

$$P(f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Oblicz jego normę.

ZADANIE 6. Dana jest ustalona funkcja mierzalna i ograniczona $g(x,y)$ określona na $[0,1]^2$. Rozważamy operator "jądrowy" $f \to P(f)$ z przestrzeni $L^1([0,1])$ w tą samą przestrzeń zadany wzorem

$$P(f)(x) = \int_0^1 g(x,y)f(y)\,dy$$

Oblicz jego normę.

ROZWIĄZANIE: Wyjdzie następująca norma:

$$\|P\| = \operatorname*{esup}_{y\in[0,1]} \int |g(x,y)|\,dx.$$

Dowód nierówności w jedną stronę jest łatwy. Niech $M = \operatorname{esup}_{y\in[0,1]} \int |g(x,y)|\,dx$. Wtedy

$$\|P(f)\|_1 = \int \Big| \int g(x,y)f(y)\,dy \Big|\,dx \le \int \int |g(x,y)||f(y)|\,dy\,dx =$$
$$\int \int |g(x,y)||f(y)|\,dx\,dy = \int |f(y)| \left(\int |g(x,y)|\,dx \right) dy \le M \int |f(y)|\,dy = M\|f\|_1.$$

W drugą stronę. Ustalmy dowolny $\epsilon > 0$. Funkcję g można przybliżyć funkcją prostą na bazie prostokątów mierzalnych (tych o mierze zero nie piszemy), jednostajnie z dokładnością do ϵ:

$$g_\epsilon = \sum_{m,n} a_{m,n} \mathbf{1}_{A_m \times B_n}.$$

Dla każdego y mamy (z dokładnością do ϵ), oznaczjąc przez μ miarę Lebesgue'a:

$$\int |g(x,y)|\,dx \approx \int |g_\epsilon(x,y)|\,dx = \sum_m |a_{m,n_y}|\mu(A_m),$$

gdzie n_y jest takie, że $y \in B_{n_y}$. Ponieważ M to supremum ISTOTNE takich całek, to lewa strona jest większa od $M - \epsilon$ na zbiorze miary dodatniej i wtedy dla y z tego zbioru prawa strona przekracza $M - 2\epsilon$. Parametry n_y na tym zbiorze miary dodatniej przyjmują przeliczalnie wiele wartrości, więc któraś z nich, powiedzmy n_0 pojawia się też dla y o dodatniej mierze. Niech $f(y) = \frac{1}{\mu(B_{n_0})} \mathbf{1}_{B_{n_0}}(y)$. Wtedy oczywiście $\|f\|_1 = 1$ oraz

$$\|P(f)\|_1 = \int \Big| \int g(x,y)f(y)\,dy \Big|\,dx = \tfrac{1}{\mu(B_{n_0})} \int \Big| \int_{B_{n_0}} g(x,y)\,dy \Big|\,dx \approx$$
$$\tfrac{1}{\mu(B_{n_0})} \int \Big| \int_{B_{n_0}} g_\epsilon(x,y)\,dy \Big|\,dx.$$

(równość z dokładnością do ϵ wynika z tego, że g różni się od g_ϵ o nie więcej niż ϵ, całkowanie po dy jest po zbiorze miary $\mu(B_{n_0})$, więc różnica całek jest co najwyżej $\epsilon\mu(B_{n_0})$, potem jest całkowanie po x, a potem to się dzieli przez $\mu(B_{n_0})$). W ostatnim wyrażeniu wewnętrzna całka, dla ustalonego x wynosi

$$a_{m_x,n_0}\mu(B_{n_0}),$$

gdzie m_x jest takie, że $x \in A_{m_x}$. Zatem obliczając całkę zewnętrzną mamy skrócenie $\mu(B_{n_0})$ i dalej

$$\tfrac{1}{\mu(B_{n_0})} \int \Big| \int_{B_{n_0}} g_\epsilon(x,y)\,dy \Big|\,dx = \sum_m |a_{m,n_0}|\mu(A_m) \ge M - 2\epsilon.$$

Stąd $\|P\| \ge M - 2\epsilon$, a z dowolności ϵ, $\|P\| \ge M$, Koniec.

ZADANIE 7. Dany jest operator liniowy $P \in L(X,Y)$ o normie r. Operator sprzężony $P^* \in L(Y^*, X^*)$ określamy wzorem

$$\langle x | P^*(y^*) \rangle = \langle P(x) | y^* \rangle.$$

sprawdź, że jest to poprawnie określony operator liniowy i oblicz jego normę.

ZADANIE 8. Sprawdź, że przyporządkowanie $x \mapsto x^*$, gdzie x^* zadany jest wzorem

$$\langle y^* | x^* \rangle := \langle x | y^* \rangle$$

określa izometryczny izomorfizm z X w $(X^*)^*$. Czy zawsze jest on surjekcją?

Tomasz Downarowicz